FONCTIONS

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Exercice : On considère la fonction $f(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x$.

a) Représenter graphiquement f.

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$.

Solution : a)

* $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) = \boxed{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

$f'(x) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$ de sorte que :

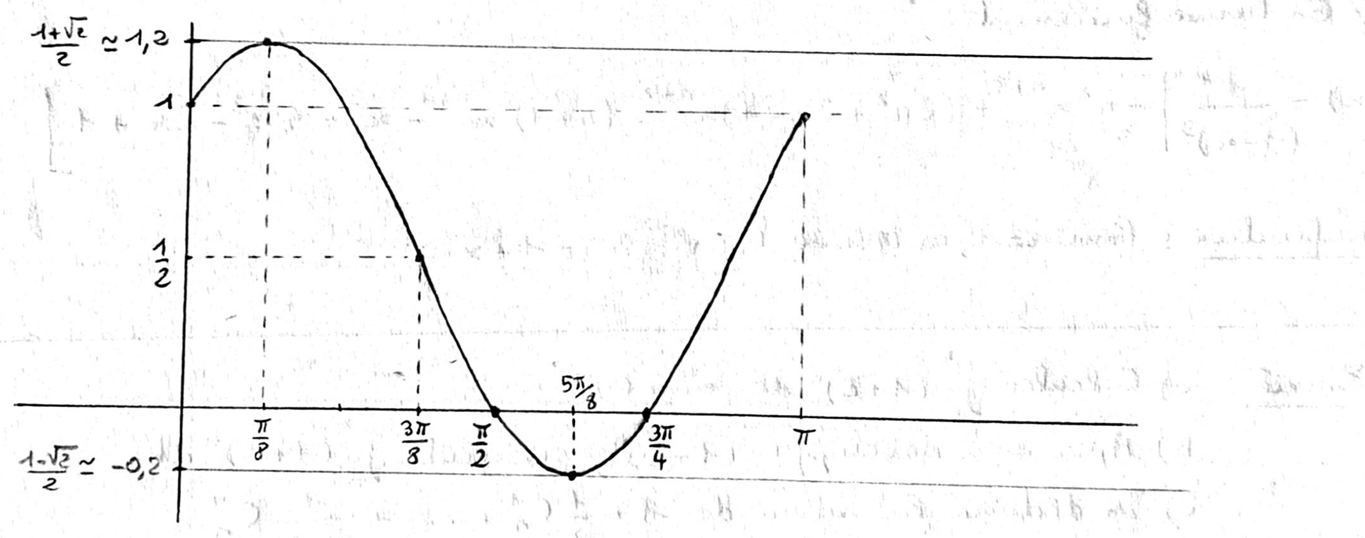
$f'(x) = 0 \iff \dfrac{\pi}{4} - 2x = k\pi \iff x = \dfrac{\pi}{8} - k\dfrac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$f'(x) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2k\pi < \dfrac{\pi}{4} - 2x < (2k+1)\pi \iff \dfrac{\pi}{8} - (2k+1)\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{8} - k\pi$

* f est périodique de période π, donc on l'étudie sur $[0, \pi]$.

$\pi/8$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
f'	1	$+$	0	$-$	0	$+$	1
f	1	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1



b) Aire géométrique entre $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = \pi$:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{1}$$

car $\displaystyle\int f\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Enoncé : $f(x) = 1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots + (n-1)nx^{n-2}$

$g(x) = 1 + x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + n^2x^n$

1°/ Déterminer la primitive f_1 de f qui vaut 1 pour $x=0$, puis la primitive f_2 de f_1 valant 1 pour $x=0$. Donner une autre expression de f_2 lorsque $x \neq 1$. En déduire d'autres expressions de f_1 et f lorsque $x \neq 1$.

2°/ Montrer que $g = 1 + xf_1 + x^2 f$

3°/ En déduire une autre expression de $g(x)$ lorsque $x \neq 1$.

1°/ $f(x) = \sum_{k=2}^{n} (k-1)kx^{k-2} \Rightarrow f_1(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \Rightarrow f_2(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$.

Ainsi : $f_1(x) = f_2'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

$$f(x) = f_1'(x) = \frac{n(1-n)x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n(n+1)x^{n-1} + 2}{(1-x)^3}$$

2°/ $1 + xf_1 + x^2 f = 1 + x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} + x^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1)kx^{k-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k + 1 = g(x)$

3°/ On trouve facilement :

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^3}\left[-n^2x^{n+3} + (2n^2+2n-1)x^{n+2} - (n+1)^2x^{n+1} - x^3 + 4x^2 - 2x + 1\right]$$

Vérification : Pour $n=1$, on trouve bien $g(x) = 1 + x$

Enoncé : a) Calculer $\int_0^x (1+t)^n \, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

b) Après avoir développé $(1+t)^n$, recalculer $\int_0^x (1+t)^n \, dt$

c) En déduire la valeur de $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Sol. a) $\int_0^x (1+t)^n \, dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$

b) $\int_0^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k \, dt = \sum_0^n C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

c) Pour $x = 1$, on obtient : $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

---

a) Etudier le signe de $g(x) = 2\sqrt{1-x} - x$
b) Etudier puis représenter graphiquement la fonction $f(x) = x\,e^{\sqrt{1-x}}$

a) Def $g =]-\infty, 1]$.

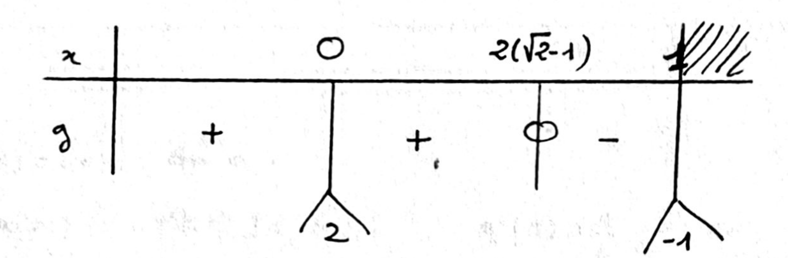
$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} \geq x \quad (*)$

$(*)$ est trivial si $x \leq 0$.

Si $0 < x \leq 1$, $(*) \Leftrightarrow 4(1-x) \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2-2\sqrt{2} \leq x \leq -2+2\sqrt{2}$

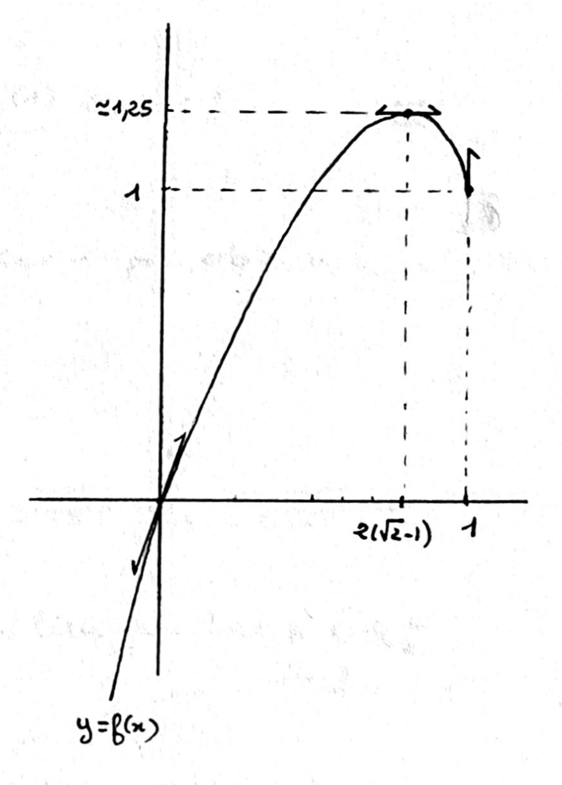
$\Delta' = 8 > 0$
racines : $-2 \pm 2\sqrt{2}$

D'où :



b) $f'(x) = \dfrac{g(x)\,e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ sera du signe de $g(x)$

x	$-\infty$		$2(\sqrt{2}-1) \simeq 0,8$		1
f'		$+$	0	$-$	$-\infty$
f	$-\infty$	↗	$\simeq 1,25$	↘	1



On désire montrer que pour tout réel $x > 0$ $\qquad \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \qquad (*)$

a) Soit $x > 1$. Utiliser les inégalités des accroissements finis pour la fonction ln sur l'intervalle $[1, x]$ pour obtenir $(*)$.

Soit $0 < x < 1$. Noter que $\frac{1}{x} > 1$ et retrouver $(*)$.

Conclure.

b) Tracer les représentations graphiques des fcts $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = \ln x$ et $h(x) = x - 1$ dans le même repère.

c) Proposer une autre démonstration de $(*)$ qui utilise 2 études des variations de fonctions.

---

a) * Posons $g(x) = \ln x$. On a :

$$\forall x > 1 \quad \forall t \in]1, x[\qquad g'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} \leq g'(t) \leq 1$$

Les inégalités des acc. finis (*) donnent :

$$\forall x > 1 \qquad \frac{1}{x}(x-1) \leq \underbrace{g(x) - g(1)}_{\ln x} \leq x - 1$$

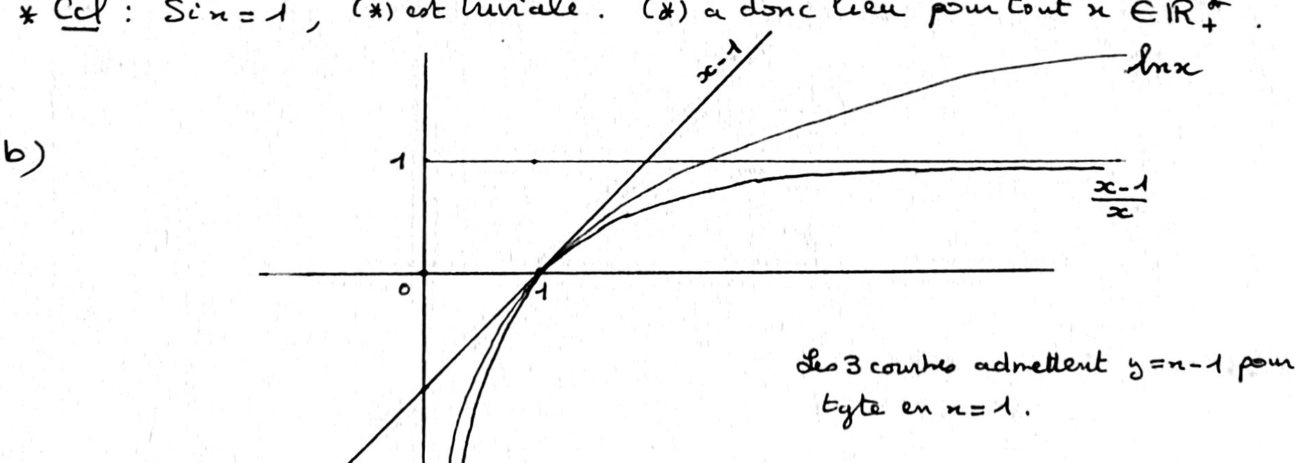
* Il suffit d'appliquer $(*)$ à $\frac{1}{x}$ quand $0 < x < 1$ pour obtenir :

$$\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \leq \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$1 - x \leq -\ln x \leq \frac{1-x}{x} \qquad \text{d'où } (*) \text{ dans ce cas.}$$

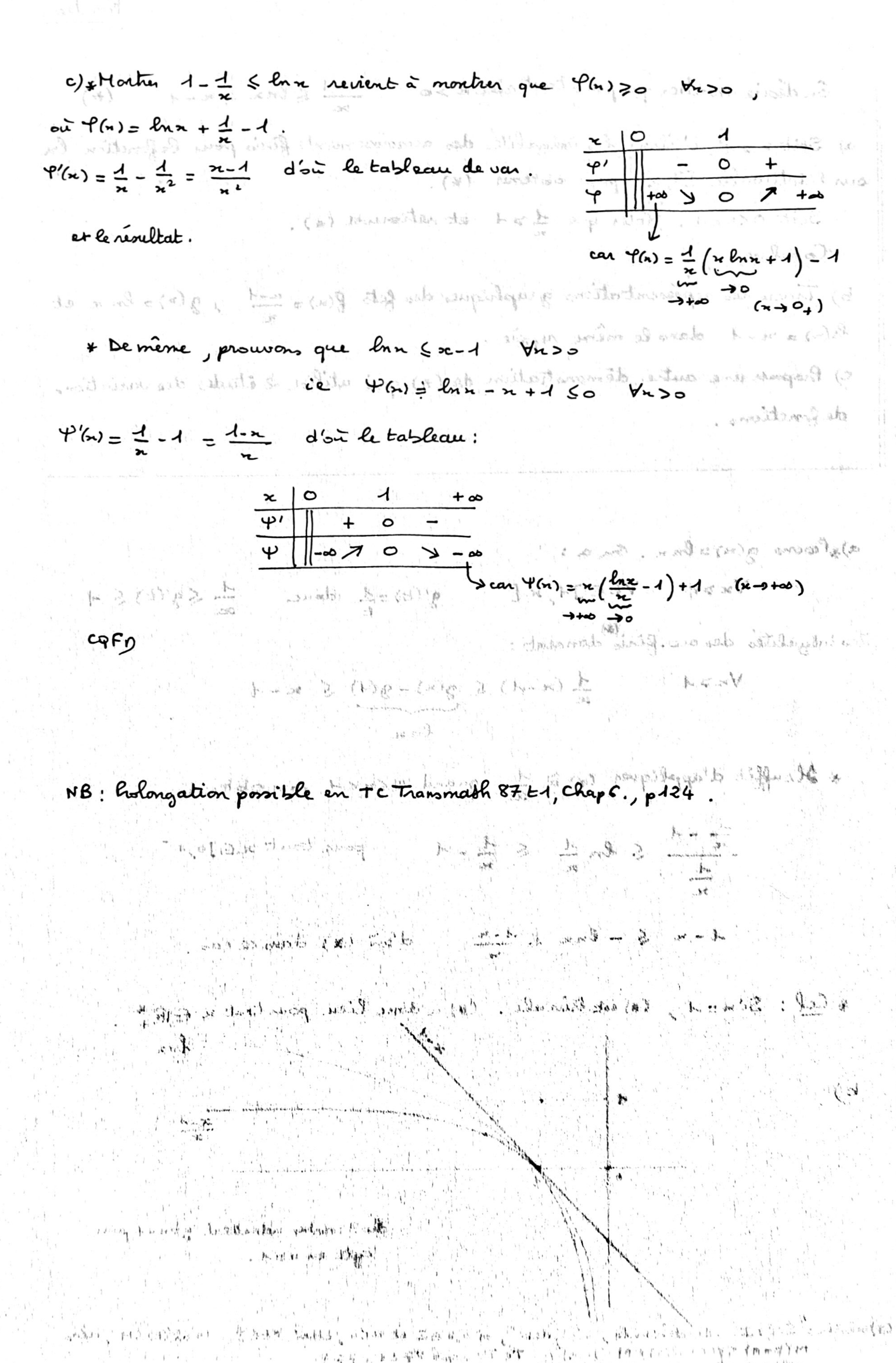
* Ccl : Si $x = 1$, $(*)$ est triviale. $(*)$ a donc lieu pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b)



Les 3 courbes admettent $y = x - 1$ pour tgte en $x = 1$.

(*) version : "Si $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, I int. de $\mathbb{R}$, si $a, b \in I$ et $a < b$, et si $\forall t \in I \quad m \leq f'(t) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$" (cf TC Transmath 87 t1 p77)



c) * Montrer $1-\frac{1}{x} \leq \ln x$ revient à montrer que $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x>0$,

où $\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$.

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ d'où le tableau de var.

x	0		1		
φ'	‖	$-$	0	$+$	
φ	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

car $\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(x\ln x + 1\right) - 1$, avec $\frac{1}{x} \to +\infty$ et $x\ln x \to 0$ $(x \to 0_+)$

et le résultat.

* De même, prouvons que $\ln x \leq x-1 \quad \forall x>0$

i.e. $\psi(x) \doteq \ln x - x + 1 \leq 0 \quad \forall x>0$

$\psi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ d'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
ψ'	‖	$+$	0	$-$	
ψ	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

car $\psi(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 1$, avec $x \to +\infty$ et $\frac{\ln x}{x} \to 0$ $(x \to +\infty)$

CQFD

NB : Prolongation possible en TC Transmath 87 t1, Chap 6., p124.

ln n'est pas une fraction rationnelle.

Soit $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ une fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$, où f et g sont 2 polynômes à coefficients réels.

On suppose que 1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

2) $\forall x \in D \setminus \{0\} \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$

Montrer que l'on arrive à une absurdité.

(Ind. : Écrire $g(x) = x^n h(x)$ où $h(0) \neq 0$, et montrer que nécessairement $n \geq 1$)

---

* 0 sera racine du polynôme g (sinon $g(0) \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} \neq -\infty$)

* $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} \iff \dfrac{f'g - fg'}{g^2} = \dfrac{1}{x} \iff x\,(f'g - fg') = g^2(x)$

Notons $g(x) = x^n h(x)$ où $n \geq 1$ et $h(0) \neq 0$, on aura :

$$x\left(f'(x) \cdot x^n h(x) - f(x)\left[n x^{n-1} h(x) + x^n h'(x)\right]\right) = x^{2n} h^2(x)$$

$$x^{n+1} f' \cdot h - n x^n f \cdot h - x^{n+1} f \cdot h' = x^{2n} \cdot h^2$$

$$x f' \cdot h - n f \cdot h - x f \cdot h' = x^n \cdot h^2 \qquad \text{pour tout } x \in D \setminus \{0\}$$

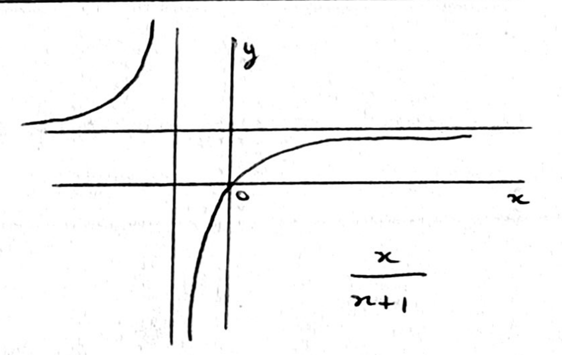
Pour $x = 0$, on obtient $f(0) \cdot h(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ absurde ! (sinon on aurait simplifié la fraction rationnelle $\dfrac{f}{g}$ par x)

CQFD

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \cos x$$

Mq $f(\mathbb{R}_+) =]-1, 1[$



Si $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{x}{x+1} < 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

entraînent $f(\mathbb{R}_+) \subset]-1, 1[$

Réc., soit $m \in]-1, 1[$.

$\lim\limits_{k \to +\infty} f(k2\pi) = \lim \frac{k2\pi}{k2\pi + 1} = 1$ donc il existe k_0 tel que

$$f(k_0 2\pi) > m$$

$\lim\limits_{k \to +\infty} f(k2\pi + \pi) = \lim - \frac{k2\pi + \pi}{k2\pi + \pi + 1} = -1$, donc il existe

$k_1 \in \mathbb{N}$ tq $f(k_1 2\pi + \pi) < m$.

Le th. des valeurs intermédiaires et $f(\pi + k_1 2\pi) < m < f(k_0 2\pi)$, f continue, entraînent $m \in f(\mathbb{R}_+)$.

réf. Tenacher TCE 92 II

a) En utilisant la fonction logarithme décimal log, exprimer le nombre $C(n)$ de chiffres de l'écriture décimale d'un entier naturel n.

b) Combien de chiffres interviennent dans l'écriture décimale de :

$$9^{(9^9)} \ ? \qquad 2^{86242}\left(2^{86243}-1\right) \ ?$$

Donner une approximation aussi précise que possible pour ces 2 nombres.

---

a) $C(n)$ est caractérisé par : $10^{C(n)-1} \leqslant n < 10^{C(n)}$

soit : $C(n)-1 \leqslant \log n < C(n)$

Donc $\boxed{C(n) = E(\log n) + 1}$

b) * Soit $n = 9^{(9^9)}$:

Le danger réside dans la confusion possible entre :

$9^{(9^9)} \longrightarrow$ la machine affiche "error" (overflow)

$(9^9)^9 \longrightarrow$ " " $1,9663.10^{77}$

$$\log 9^{(9^9)} = 9^9 \log 9 \simeq 369\ 693\ 099,6$$

Le nbre de chiffres de l'écriture décimale de $9^{(9^9)}$ est donc <u>369 693 100</u>

et son approximation sera :

$$9^{(9^9)} \simeq 10^{369\,693\,099,6} = 10^{0,6} \cdot 10^{369\,693\,099}$$

$$\simeq 3,981071706 \cdot 10^{369\,693\,099}$$

* Pour $n = 2^{86242}(2^{86243} - 1)$:

$n = 2^{172485} - 2^{86242}$ aura le m̂ nbre de chiffres que 2^{172485}. On calcule donc : $\log 2^{172485} = 172485 . \log 2 \simeq 51923,1588$

soit 51924 chiffres dans l'écriture de n.

Pour approximer n, on va chercher des approximations de 2^{172485} et 2^{86242} par la méthode précédente :

$$\log 2^{172485} \simeq 51923,1588 \Rightarrow 2^{172485} \simeq 10^{0,1588} . 10^{51923}$$
$$\simeq 1,441451386 . 10^{51923}$$

$$\log 2^{86242} \simeq 25961,42889 \Rightarrow 2^{86242} \simeq 10^{0,42889} . 10^{25961}$$
$$\simeq 2,684664376 . 10^{25961}$$

D'où $n \simeq 1,441451386 . 10^{51923} - 2,684664376 . 10^{25961}$
$$\simeq (1,441451386 . 10^{25962} - 2,684664376) . 10^{25961}$$

et je ne vois aucun inconvénient à approximer n par $1,44 . 10^{51923}$ (!).

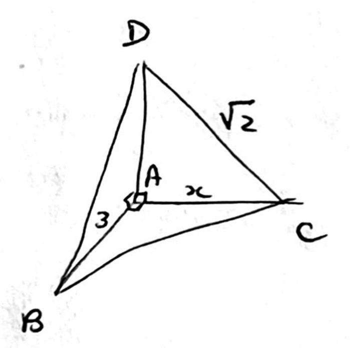
Exercice 1 du concours général 1998 : Un tétraèdre vérifie les cond. suivantes :

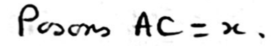
(a) les arêtes AB, AC et AD sont 2 à 2 orthogonales

(b) $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$

Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

(cf énoncé en uccs 0001)




Posons $AC = x$.

$$\begin{cases} BC^2 = 9 + x^2 \\ AD^2 = 2 - x^2 \\ BD^2 = 9 + (2 - x^2) = 11 - x^2 \end{cases}$$

donc

$$f(x) = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$$

$$= (9 + x^2)^3 + (11 - x^2)^3 - x^6 - (2 - x^2)^3$$

$$= 54x^4 - 108x^2 + 1566$$

Posons $x^2 = t$. Le minimum de la fct du 2-degré $g(t) = 54t^2 - 108t + 1566$ est atteint pour t annulant $g'(t) = 108t - 108$, ie pour $t = 1$.

La valeur minimale de $f(x)$ est donc obtenue pour $t = 1$, ie $x = 1$.

C'est :

$$f(1) = 54 - 108 + 1566 = \boxed{1512}$$

a) Etudier le signe de $g(x) = 2\sqrt{1-x} - x$

b) Etudier puis représenter graphiquement la fonction $f(x) = x\,e^{\sqrt{1-x}}$

---

a) Def $g =]-\infty, 1]$.

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} \geq x$ (*)

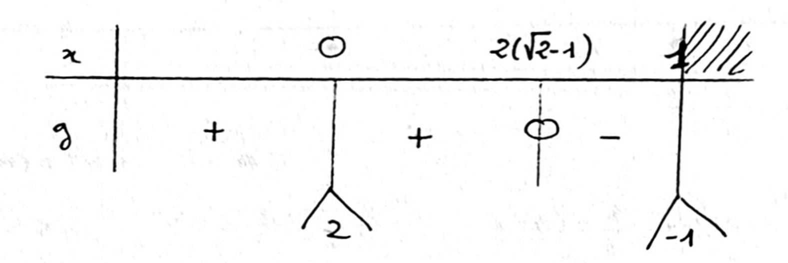
(*) est trivial si $x \leq 0$.

Si $0 < x \leq 1$, (*) $\Leftrightarrow 4(1-x) \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2-2\sqrt{2} \leq x \leq -2+2\sqrt{2}$

$\Delta' = 8 > 0$

racines : $-2 \pm 2\sqrt{2}$

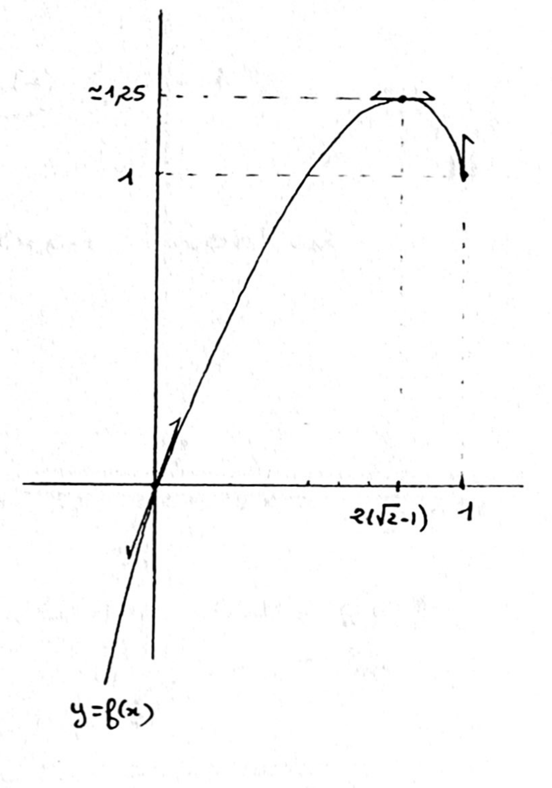
D'où :



x		0		$2(\sqrt{2}-1)$		1
g	$+$	2	$+$	0	$-$	-1

b) $f'(x) = \dfrac{g(x)\,e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ sera du signe de $g(x)$

x	$-\infty$		$2(\sqrt{2}-1) \simeq 0{,}8$		1
f'		$+$	0	$-$	$-\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\simeq 1{,}25$	$\searrow$	1



On désire montrer que pour tout réel $x > 0$ $\quad \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \quad (*)$

a) Soit $x > 1$. Utiliser les inégalités des accroissements finis pour la fonction ln sur l'intervalle $[1, x]$ pour obtenir $(*)$.

Soit $0 < x < 1$. Noter que $\frac{1}{x} > 1$ et retrouver $(*)$.

Conclure

b) Tracer les représentations graphiques des fcts $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = \ln x$ et $h(x) = x - 1$ dans le même repère.

c) Proposer une autre démonstration de $(*)$ qui utilise 2 études des variations de fonctions.

---

a) * Posons $g(x) = \ln x$. On a :

$$\forall x > 1 \qquad \forall t \in]1, x[\qquad g'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} \leq g'(t) \leq 1$$

Les inégalités des acc. finis(*) donnent :

$$\forall x > 1 \qquad \frac{1}{x}(x-1) \leq \underbrace{g(x) - g(1)}_{\ln x} \leq x - 1$$

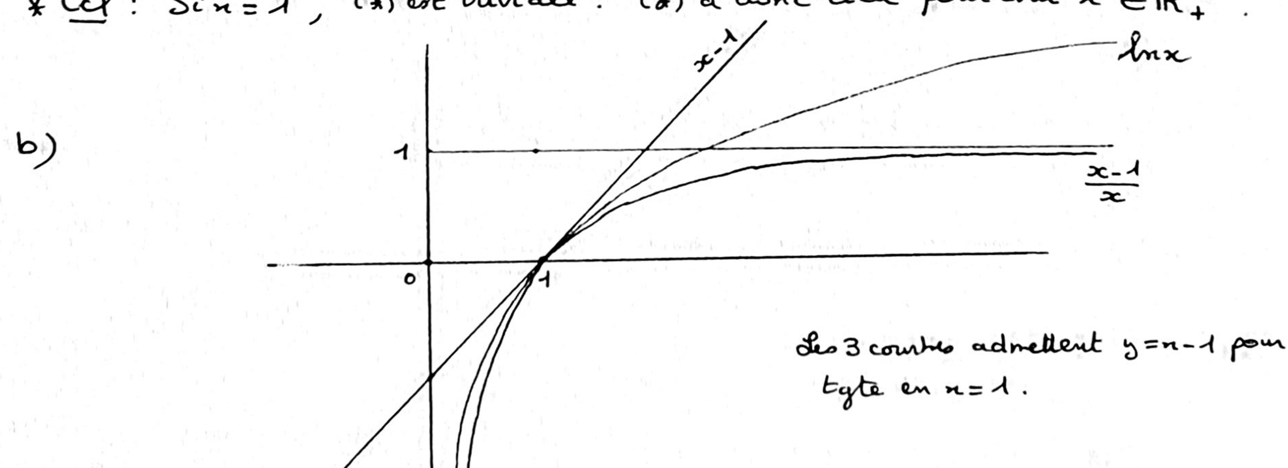
* Il suffit d'appliquer $(*)$ à $\frac{1}{x}$ quand $0 < x < 1$ pour obtenir :

$$\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \leq \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$1 - x \leq -\ln x \leq \frac{1-x}{x} \qquad \text{d'où } (*) \text{ dans ce cas.}$$

* <u>Ccl</u> : Si $x = 1$, $(*)$ est triviale. $(*)$ a donc lieu pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b)



Les 3 courbes admettent $y = x - 1$ pour tgte en $x = 1$.

(*) version : "Si $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, I int. de $\mathbb{R}$, si $a, b \in I$ et $a < b$, et si $\forall t \in I$ $\; m \leq f'(t) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ ..."

c) * Montrer $1-\frac{1}{x} \leq \ln x$ revient à montrer que $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x>0$,

où $\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$.

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ d'où le tableau de var.

x	0		1		
φ'	‖	$-$	0	$+$	
φ	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

car $\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}(\underbrace{x \ln x}_{\to 0} + 1) - 1 \quad (x \to 0_+)$

et le résultat.

* De même, prouvons que $\ln x \leq x-1 \quad \forall x>0$

ie $\psi(x) \doteq \ln x - x + 1 \leq 0 \quad \forall x>0$

$\psi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ d'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
ψ'	‖	$+$	0	$-$	
ψ	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

car $\psi(x) = \underbrace{x}_{\to +\infty}(\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - 1) + 1 \quad (x \to +\infty)$

CQFD

NB : Prolongation possible en TC Transmath 87 t1, Chap 6., p124.

Une fonction booléenne est une application f de $\mathbb{F}_2^m$ dans $\mathbb{F}_2$, où $\mathbb{F}_2 = \{0,1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Mq toutes les fonctions booléennes f de $\mathbb{F}_2^m$ dans $\mathbb{F}_2$ sont des applications polynômiales.

(cf [A]/R Moreno acm, article de Moreno / Cáceres / Alonso dernier paragraphe sur les fcts booléennes)

Récurrence sur m.

* Pour $m=1$,

$f(0) =$	0	0	1	1
$f(1) =$	1	0	1	0
$f(x) =$	x	0	1	$1+x$

C'est vrai, $f(x)$ est d'ailleurs un polynôme de degré 1.

* Au rg m : Il existe un polynôme $g(x_1, \dots, x_{m-1})$ et un polynôme $h(x_1, \dots, x_{m-1})$ tels que :

~~$f(x_1, \dots, x_m) = g$~~

$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{m-1})$$
$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, 1) = h(x_1, \dots, x_{m-1})$$

(hypothèse récurrente)

De plus :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \underbrace{g(x_1, \dots, x_{m-1})(1 - x_m) + h(x_1, \dots, x_{m-1}) . x_m}_{\text{polynôme d'indéterminées } x_1, \dots, x_m}$$

polynôme d'indéterminées $x_1, \dots, x_m$.

CQFD

NB : On a m̂ prouvé que $\deg f(x_1, \dots, x_m) \leq m$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

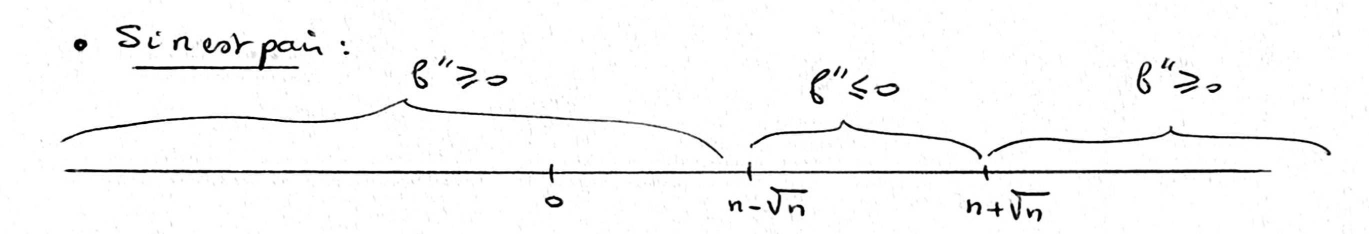
Etudier la convexité de l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x} \qquad (\text{où } n \in \mathbb{N})$$

1) Cas où $n \geq 2$: On trouve $\begin{cases} f_n'(x) = (n-x)\, x^{n-1} e^{-x} \\ f_n''(x) = (x^2 - 2nx + n^2 - n)\, x^{n-2} e^{-x} \end{cases}$

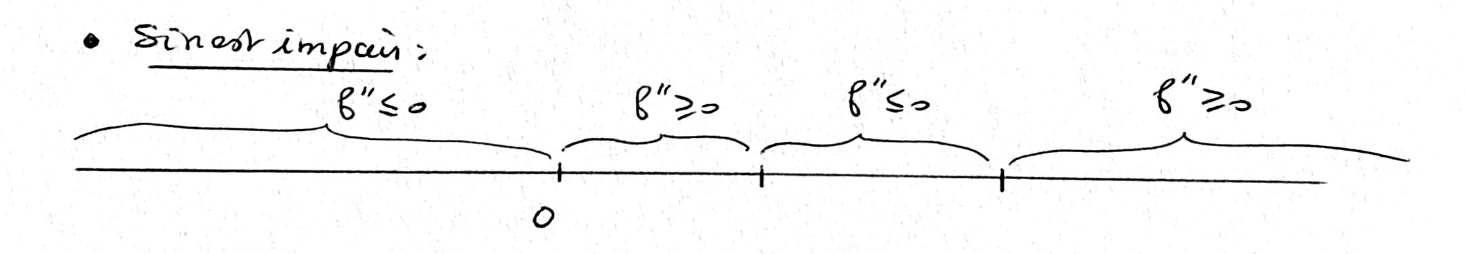
Les racines du trinôme $P(x) = x^2 - 2nx + n^2 - n$ sont $n \pm \sqrt{n}$, d'où la discussion :

- Si n est pair :



f sera convexe sur $]-\infty, n-\sqrt{n}]$ et sur $[n+\sqrt{n}, +\infty[$, concave sur $[n-\sqrt{n}, n+\sqrt{n}]$.

- Si n est impair :



2) Cas où $n = 0$: $f_0(x) = e^{-x}$ est convexe car $f_0''(x) = e^{-x} \geq 0$

3) Cas où $n = 1$: $f_1(x) = x e^{-x} \Rightarrow f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$

$$\Rightarrow f_1''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

donc f_1 est convexe sur $[2, +\infty[$

" concave sur $]-\infty, 2]$.